

神戸大学農学部 異 二郎

フラクタルとは、従来の数学では取り扱わなかった種類の図形を記述しようとする幾何学であって、1970年代の終わりにマンデルブロが提唱した数学的概念である(Mandelbrot,1983)。たとえば円という幾何图形を考えてみると、その半径 $r$ を指定することによって円の形(大きさ)を決めることができる。すなわち円は特徴的な長さ $r$ を持っている。正方形や三角形も然りである。この特徴的な長さを用いて私達は与えられた幾何图形を記述できる。

ところが特徴的な長さを持たない图形が私達の周りにたくさんある。たとえばガラスのびんにはいったひび割れの形は不規則で、至るところでギザギザしていて、折れ線で近似しようとするとたくさんの線分が必要となる。積乱雲の形はおおまかに見ると円や橢円で近似できるが、少し詳しく見ると多くの凸凹が目について、それらを近似するためには半径の異なる多くの円や橢円が必要となる。なぜならガラスの割れ目や雲の形が特徴的な長さを持たないからである。たとえばひび割れの全長を特徴的な長さとして採用しようとしても、ひび割れの全長を決定することができない。

いまかりに2mm幅のコンパスで測定した全長と1mm幅のコンパスで測定した全長を比べると、当然後者の方が長くなる。もっと幅の小さいコンパスを用いると、全長はさらに長くなる。つまり用いる物差しのサイズによって測定される長さが異なってくる。この原因は、ひび割れの形が至るところギザギザしていて、一部分を拡大すると今まで見えなかったさらに細かい構造が見えてくるためである。このような特徴的な長さを持たない图形や構造、現象をフラクタルと総称する。特徴的な長さを持たない图形の大切な性質は、自己相似性である。前述の雲の形についてもこのことが言える。雲の一部を拡大率を変えて拡大しても、全体の形と同じような形に見える。ただ部分と全体が完全に相似形になっているのではなくて、同じような複雑さを持った形に見えるのであって、この場合、統計的な意味で自己相似になっている。

フラクタルという言葉は、マンデルブロが名付けたもので FRACTION(断片)に由来している。もともとは幾何图形の記述から出発したのであるが、最近は图形だけでなくもっと広く、例えば脳波の時間的変化(Arle, 1990)などさまざまな現

象に応用されはじめている。

さて、ある図形がフラクタルであるかどうかを調べるにはどうしたらよいであろうか。その一番わかりやすい方法として粗視化の度合いを変化させる方法がある。いま根系を2次元面平面に展開した図形を考えてみる。この上に一辺 $r$ の正方形の網目で区切られた、根系を覆う枠を置いて、根系が少しでも入った網目の数 $N(r)$ を数える。 $r$ の値を色々に変えて、そのとき根系が入った網目の数 $N(r)$ を記録する。対数グラフ上に横軸に $r$ 、縦軸に $N(r)$ をとってプロットしたとき、図形がフラクタルであれば右下がりの回帰直線が得られる。この回帰直線の傾きの絶対値がフラクタル次元 $D$ を与える。2次元図形の場合、 $D$ は1と2の間にある。 $D$ が大きいほど図形は複雑であり、 $D=2$ では平面を満たす図形となる。このほかに測度の関係より求める方法や相関関数より求める方法などがある（高安、1986）。

植物についてフラクタルを応用したのは、Morseら(1985)が最初だと思われる。彼らはいくつかの種類のつる性の植物の地上部や木の枝の輪郭を解析して、それらの形がフラクタルであることを示した。そして輪郭の複雑さを定量的に示す指標であるフラクタル次元( $D$ )としてほぼ1.5程度の値を得た。VlcekとCheung(1986)はカシ類やカエデ、イチョウなどの樹木の葉を調べて、その葉縁の形がフラクタルであり、葉縁の複雑さの程度によって $D$ が1.02から1.28までの値を取ることを示した。

植物の根系の形がフラクタルであることは、筆者らによって初めて示された(Tatsumi et al., 1989)。筆者らはキビ、トウモロコシ、エンドウなどのイネ科作物5種、マメ科作物2種の根系の2次元平面に展開したイメージの輪郭を画像解析し、これらの根系が0.3 mmから20 mmのスケール範囲内でフラクタルであり、ほぼ1.5前後の $D$ が得られることを示した。その後筆者らはダイズとササゲの幼植物を播種後40日目まで根箱で育て、根系を経時的に採取し、生育にともなう $D$ の変化、根長と $D$ 、根端数と $D$ との関係を同様にして調べた(巽、1992)。その結果、生育にともない $D$ が増加すること、根系の総根長と $D$ とが高い正の相関を示すこと、また総根端数と $D$ との間にも高い正の相関が存在することを明らかにした。これらのこととはフラクタル次元が根系の発達を示す新しいパラメータとして有効であるこ

とを示している。

フラクタル次元  $D$  は、根系の発育形態の複雑さの程度を、定量的に示していると考えられるが、その内容は単純ではない。単位面積または単位空間あたりの根長（根長密度）、分枝数（分枝密度）、分枝角度、根の直径分布などのパラメータが相互に密接に関連しあっているであろう。最近 Fitter と Stickland は (Fitter and Stickland, in press) アカクローバ、シロクローバ、ヘラオオバコ、シープフェスク、レッドフェスクの芽生えを 3 mm 幅の根箱で 30 日まで育て、それらの根系を経時的に採取して、根系の  $D$  を調べるとともにトポロジー解析を行った。その結果生育にともない  $D$  は最初徐々に増加し、その後急速な増加に転じ、やがて頭打ちになるかあるいはやや減少した。このような変化は初期の主根軸の伸长期、引き続く特徴的な分枝の発達といった根系成長のパターンと対応していると思われた。 $D$  は外部リンク長と負の相関にあり、トポロジカル指数 (Topological Index) とは正の相間にあった。

私たちは インゲンマメを根箱で育て、地上部の遮光処理が根系の発達に及ぼす影響を、 $D$  と根長を中心に調べた。その結果対照区では根系の全根長の増加につれて  $D$  が増大したのに対して、遮光処理区では根長の増加にもかかわらず、 $D$  が減少するという興味ある傾向が認められた（巽、未発表データ）。根系構造の詳しい解析をまだ行っていないが、おそらく遮光処理によって分枝密度が低下したために  $D$  が減少したのであろう。このように、 $D$  の値は根系の発達にともなって単純に増加するのではなく、根系の発育相の変化によって増減するものと考えられる。

渋沢らは (1992) 根箱で育てたトウモロコシ根系を調べ、広い空間スケール (10 cm のオーダー) では観測方向にかかわらず測度と根系面積との間にべき関係が成立するが、より狭いスケールにおいては根系は異方的なフラクタルあるいは自己アフィンフラクタル (Mandelbrot, 1982, Vicsek, 1989) であることを示した。すなわち根系は完全な自己相似ではなく、統計的な意味での自己相似性を持っている。これは根系の成長が方向性を有していることから見てある意味では当然である。

以上の研究では根系を 2 次元平面上に展開して、その輪郭をもとにしてフラクタル構造を調べている。根系は本来土壤空間中に 3 次元に発達するものである。3 次元空間中の根系のフラクタル次元はどうなっているのであろうか。 $d$  次元空間

中の $D$  次元フラクタルの  $m$  次元スライス（断面）は、通常  $D - (d-m)$  次元のものとなる（Vicsek, 1989）。したがっていま、根系のフラクタル次元  $DD$  が 3 次元空間の 2 次元断面で得られたものと仮定すると、根系の 3 次元空間でのフラクタル次元  $D$  は  $D=DD+(d-m)=DD+(3-2)=DD+1$  となる。したがって 3 次元的に見た根系の表面もまたフラクタルであり、その複雑さは根の輪郭から測定した  $D$  に 1 を加えた程度であると推定される。田中ら（田中ら, 1990）は圃場に生育したダイズの根系を調べ、1 cm から 8 cm のスケール範囲で根系の空間分布がフラクタルであることを示した。得られたフラクタル次元は 2.02 から 2.28 であった。

先述したように、Morse らは植物の地上部の輪郭のフラクタル次元を測定して約 1.5 という値を得た。彼らは植物の表面に生息する虫の体長と生息空間との関係を考察した。いま植物の表面のフラクタル次元が  $1.5 + 1 = 2.5$  であると仮定した場合、虫の体長が 10 分の 1 に小さくなると虫の生息面積が 3.16 倍に増加する。なぜなら小さい虫は大きい虫が入り込めないような隙間にまで住むことができるからである。植物表面がフラクタルであることによって、このような生態学的意味が生じる。

根系の表面がフラクタルである可能性が高いと考えられる。根系はさまざまな大きさの土壤粒子と接触しつつ伸長し、水や無機養分を獲得する。フラクタルな表面は、より小さな土壤粒子と接触して吸収面積を拡大するのに有利である。拡散速度の遅いリン酸などの資源獲得を効率良く行う上で、根系のフラクタル構造が役立っていると考えられる。

根が土壤中の空隙や割れ目に沿って伸長することは良く知られており、一方ロータリで耕耘した土塊の輪郭やひび割れがフラクタルであることが知られている（Shibusawa, 1992）。広いスケールにおける根系分布はフラクタルであり、根系の骨格の形は土壤中の空隙分布と密接な関係をもつと考えられる。

**根系のフラクタル解析** の発展性：根系成長を評価する実用的なパラメータとして、フラクタル次元が有望である。その理由の一つは測定の簡便さにある。イメージスキャナまたは TV カメラと接続した画像解析装置があれば、たとえばコアサンプラーで土壤中から採取した根系のフラクタル次元が迅速に測定できる。とくに今まで測定困難であった分枝密度の評価が簡便に行える。また根の形態を総合的に定量化できるので、活力のある根はどの様な形かといった実際的な診断や、フラクタ

ルモデルを利用して部分サンプルから根系の全体の構造を推定することが可能だとと思われる。医学分野では網膜の血管の診断へのフラクタルの応用（Mainster, 1990）が試みられている。

このように、根系研究へのフラクタル解析の応用は始まったばかりである。今後のさらなる発展が期待される。

#### 引用文献

1. Arle, J. E. and R. H. Simon 1990. An application of fractal dimension to the detection of transients in the electroencephalogram. *Electroencepha. and Neurophysiol.* 75: 296-305.
2. Fitter, A. H. and T. R. Stickland Fractal characterisation of root system architecture. *Funct. Ecol.* (in press).
3. Mainster, M. 1990. The fractal properties of retinal vessels: Embryological and clinical implications. *Eye* 4: 235-241.
4. Mandelbrot, B. B. 1883. *The fractal geometry of nature*, 469pp. Freeman, New York.
5. Morse, D. R., J. H. Lawton, M. M. Dodson and M. H. Williamson 1985. Fractal dimension of vegetation and the distribution of arthropod lengths. *Nature* 314: 731-733.
6. Shibusawa, S. 1992. Fractals in clods formed with rotary tillage. *J. Terramechanics* 29: 107-115.
7. 渋沢 栄・藤浦建史・竹山光一・岩尾俊男 1992. 土壌密度変化のトウモロコシ根系分布への影響. *農機誌* 54: 53-60.
8. 高安秀樹 1986. フラクタル. 朝倉書店, 東京.
9. 田中典幸・有馬 進・原田二郎・三原 実 1990. ダイズの根系構造に関する研究-パイプモデルと相似性について-. *日作紀* 59巻別号1: 252-253.
10. Tatsumi, J., A. Yamauchi and Y. Kono 1989. Fractal analysis of plant root systems. *Ann. Bot.* 64: 499-503.
11. 異 二郎 1992. マメ科作物の根系のフラクタル解析. *日作紀* 61巻別号1: 248-249.
12. Vicsek, T. 1989. *Fractal growth phenomena*. World Scientific, London. (宮島佐介訳, フラクタル成長現象, 朝倉書店) .
13. Vlcek, J. and E. Cheung 1986. Fractal analysis of leaf shape. *Can. J. For. Res.* 19: 124-127.